

博士前期課程
2025 年 4 月入学 一般入試

大学院ヘルスシステム統合科学研究科
医療機器医用材料部門

「選択科目」
(試験時間：120 分)

問題用紙

注意事項

1. 「解答はじめ」の指示があるまでは、次ページ以降を見てはいけません。
2. 「確率統計」、「微分積分」、「微分方程式/フーリエ・ラプラス変換」、「線形代数」、「情報理論」の 5 科目の問題が、それぞれ 1 枚ずつこの順にあります。3 科目を選択して解答しなさい。
3. 解答用紙 5 枚と下書き用紙 1 枚を配布しますが、左上に書かれた科目の問題に対する解答を書きなさい。
解答が表面だけで書けない場合には、続きを裏面に書きなさい。
4. すべての解答用紙と下書き用紙の右上には、受験番号と氏名を書きなさい。
5. 選択した科目に対しては、解答用紙の科目選択欄に『○印』をつけなさい。
6. 「解答やめ」の指示で、直ちに解答を止めなさい。指示の後も筆記用具を持っている場合には不正行為と見なします。
7. 解答時間が終了すると、解答用紙と下書き用紙は回収します。
8. 問題等で質問がある場合には、静かに挙手をしなさい。試験監督者が質問を取り次ぎます。

確率・統計

問1 事象 X の生起確率を $P(X)$ ，事象 Y が生起したという条件の下での事象 X の生起確率 (条件付確率) を $P(X|Y)$ で表わす。また，ある試行の標本空間が互いに排反な事象 A_1 と A_2 に分割されるものとし，この標本空間内のある事象を B とする。以下の間に答えよ。

(1-a) $P(B)$ を， $P(A_i \cap B)$ ($i = 1, 2$) を用いて表わせ。

(1-b) $P(A_1 \cap B)$ を $P(A_1)$ と $P(B|A_1)$ で表わせ。

(1-c) $P(A_1 \cap B)$ を $P(B)$ と $P(A_1|B)$ で表わせ。

(1-d) $P(A_1|B)$ を， $P(A_1) \cdot P(B|A_1)$ と $P(A_2) \cdot P(B|A_2)$ で表わせ。

(1-e) 2つのつぼ U_1, U_2 があって， U_1 には赤球2個と黒球1個が， U_2 には赤球3個と黒球2個が入っている。いま，サイコロを投げて1~4の目が出れば U_1 から，5, 6の目が出れば U_2 から無作為に球を1個取り出すものとする。このとき，取り出した球が赤球であった場合，その球がつぼ U_1 から取り出された確率を求めよ。

問2 離散型確率変数 X において， $X = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) となる確率 p_k が以下で与えられるものとする。ただし， c は定数である。

$$p_k = c \cdot \frac{2^k}{k!}$$

このとき，以下の間に答えよ。ただし，任意の実数 a ，自然対数の底 e について， $e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ が成立することを利用してよい。

(2-a) 確率の定義によれば， $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ はいくらか。具体的な値を記せ。

(2-b) $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ を， c を用いた式で表わせ。

(2-c) c の値を求めよ。

(2-d) X の平均 $E(X)$ を求めよ。

微分積分

問1 以下の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^4 x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

問2 以下の関数について, 次の問いに答えよ.

$$f(x) = -x e^{\frac{1}{x}}$$

- (1) $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ を求めよ.
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ を求めよ.
- (3) $y = f(x)$ の増減・凹凸を調べ, 増減表をかけ.

問3 以下の関数について, 次の問いに答えよ.

$$f(x, y) = \frac{xy}{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}$$

- (1) $(x, y) \neq (0, 0)$ であるとき $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.
- (2) 偏導関数の定義に従って $\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0)$ を求めよ.
- (3) $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ は点 $(0, 0)$ で連続であるか, 理由とともに述べよ.

微分方程式/フーリエ・ラプラス変換

問1 次の(1), (2)の微分方程式を解きなさい.

(1)

$$2xy \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

(2)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \{1 - U(x - \pi)\} \sin x \quad (0 \leq x)$$

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy(0)}{dx} = 0$$

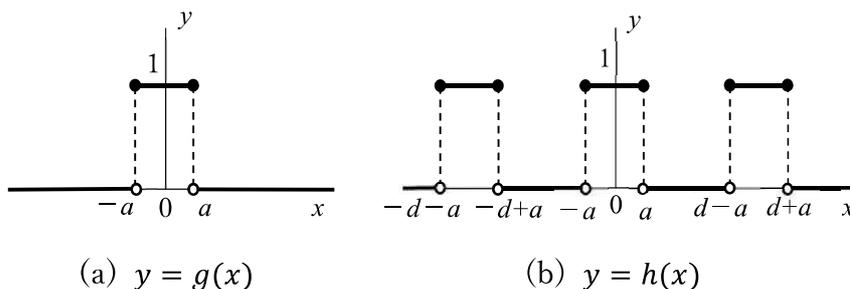
ただし $U(x)$ は, 以下のように表される単位ステップ関数とする.

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (0 \leq x) \end{cases}$$

問2 任意の関数 $f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) に対するフーリエ変換を以下の式で定義する.

$$F[f(x)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

ここで $g(x)$ と $h(x)$ は, 以下のグラフによって定義される関数とする. $h(x)$ は, $g(x)$ が x 軸方向に間隔 d で3回繰り返される波形である. ($a > 0$)



以下の(1), (2)の問いに答えよ.

(1) $F[g(x)](\omega)$ を求めよ.

(2) $F[h(x)](\omega)$ を求めよ. また $F[h(x)](\omega)$ と $F[g(x)](\omega)$ の振幅と位相 (偏角) それぞれの関係について説明せよ.

線形代数

問1 $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ が $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ と $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ の張る空間 \mathbf{U} に属するための必要十分条件を求めよ。

問2 次の同次連立1次方程式を解け。

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 13x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 21x_3 + 19x_4 = 0 \end{cases}$$

情報理論

コンピュータが 1 から 10 までの数字の中から, ある数(以下, X とする)を選び, あなたがその数を当てるゲームをする. ここで, あなたは適当な数(以下, Y とする)を選び, コンピュータに次の質問をすることができる.「 X は, Y 以下であるか, Y より大であるか.」

このとき, 以下の問に答えなさい. ただし, 問 1, 3, 4, 5, 6 の答は小数第 2 位まで計算すること. また, $\log_2 3 \approx 1.58, \log_2 5 \approx 2.32, \log_2 7 \approx 2.81$ を用いてよい.

問 1. X の値についての事象系 A を構成しなさい. また, そのエントロピー $H(A)$ を求めなさい. ただし, $X = k$ であるという事象を a_k と表すこととする.

問 2. X が 3 以下であるか, 3 より大であるかについての事象系 B を構成しなさい. ただし, X が 3 以下であるという事象を b_1 , 3 より大であるという事象を b_2 と表すこととする.

問 3. X が 3 以下であることが分かった場合の, 事象系 A のエントロピー $H(A|b_1)$ を求めなさい.

問 4. X が 3 より大であることが分かった場合の, 事象系 A のエントロピー $H(A|b_2)$ を求めなさい.

問 5. コンピュータへの質問により, “ X は 3 以下または 3 より大である” ことが分かる場合の, 条件付きエントロピー $H(A|B)$ を求めなさい.

問 6. 相互情報量 $I(A;B)$ を計算しなさい.

問 7. このゲームにおいて最も少ない回数で X を当てるには, コンピュータへ質問する数字をどの様を選べばよいか説明しなさい. ただし, 相互情報量 $I(A;B)$ という言葉を用いること.