博士前期課程
2024 年４月入学　一般入試

大学院ヘルスシステム統合科学研究科
医療機器医用材料部門

「選択科目」
（試験時間：120 分）

問題用紙

注意事項

1. 「解答はじめ」の指示があるまでは，次ページ以降を見てはいけません.
2. 「確率統計」,「微分積分」,「微分方程式/フーリエ・ラプラス変換」,「線形代数」,「情報理論」の 5 科目の問題が，それぞれ 1 枚ずつこの順にありますが，3 科目を選択して解答しなさい.
3. 解答用紙 5 枚と下書き用紙 1 枚を配布しますが，左上に書かれた科目の問題に対する解答を書きなさい.
   解答が表面だけで書けない場合には，続きを裏面に書きなさい.
4. すべての解答用紙と下書き用紙の右上には，受験番号と氏名を書きなさい.
5. 選択した科目に対しては，解答用紙の科目選択欄に『◯印』をつけなさい.
6. 「解答やめ」の指示で，直ちに解答を止めなさい．指示の後も筆記用具を持っている場合には不正行為と見なします.
7. 解答時間が終了すると，解答用紙と下書き用紙は回収します.
8. 問題等で質問がある場合には，静かに挙手をしなさい．試験監督者が質問を取り次ぎます.

確率統計

問1 事象 X の生起確率を $P(X)$，事象 X と Y の和事象および積事象を，それぞれ，$X \cup Y$ および $X \cap Y$ と表わす．今，事象 A，B，C において，A と B が独立，A と C が独立，B と C は互いに排反事象とする．以下の問に答えよ．

(1-a) $P(A)$，$P(B)$，$P(A \cap B)$ の間で成り立つ等式を記せ．

(1-b) $P(B)$，$P(C)$，$P(B \cup C)$ の間で成り立つ等式を記せ．

(1-c) 事象 A と $B \cup C$ が独立であることを示せ．

問2 離散型確率変数 X において，$X = k$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ となる確率 p_k が以下で与えられるものとする．ただし，c $(0 < c < 1)$ は定数である．

$$p_k = \frac{2}{3} c^k$$

このとき，以下の問に答えよ．

(2-a) 確率の定義によれば，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ はいくらか．具体的な値を記せ．

(2-b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ を，c を用いた式で表わせ．

(2-c) c の値を求めよ．

(2-d) X の平均 $E(X)$ を求めよ．

微分積分

問１　関数 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ の増減，凹凸を調べ，曲線 $y = f(x)$ の概形を描け．

問２　以下の定積分を求めよ．

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\log_e x}{x} dx$$

問３　以下の二重積分について，変数変換 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ を用いて求めることを考える．（１）から（３）に答えよ．但し，p，qは任意の正の定数とする。

$$I = \iint_D (px^2 + qy^2) dxdy,$$

$$D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leqq a^2\} \quad (a > 0)$$

(1) 変数変換を行なった場合の，r と θ の範囲を求めよ．

(2) 変数変換に対するヤコビアンを求めよ．

(3) 二重積分 I を求めよ．

微分方程式/フーリエ・ラプラス変換

問１　次の微分方程式について答えよ．

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+4y=x^2$$

(1)　$x=e^t$とおいて，yとtについての微分方程式を求めよ．

(2)　(1)の結果を用いて，微分方程式の一般解を求めよ．

問２　関数$f(t)$のラプラス変換$F(s)$およびラプラス逆変換を以下のように定義する．

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\mathcal{L}\{f(t)\},\qquad f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

（ただしsは複素数）

次の$Y(s)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$のラプラス逆変換を求める．(1)，(2)について答えよ．

$$Y(s)=\log_e\left(\frac{s^2+2s+5}{s^2-1}\right)$$

(1)　次の式が成り立つことを示せ．

$$tf(t)=-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{dF(s)}{ds}\right\}$$

(2)　$y(t)$ を求めよ．

線形代数

問１　点 A$(-1,\ 3,\ 2)$と点 B$(2,\ 5,\ 1)$を通る直線の方程式を求めよ．また，点 A と点 B と点 C$(1,\ 1,\ 0)$を含む平面の方程式を求めよ．

問２　次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

問３　行列 **A** が次式で与えられる．

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

このとき，$g(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 - 4\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} + 8\mathbf{E}$ をケーリー・ハミルトンの定理を用いて求めよ．

情報理論

（１）時刻 t に出力された記号 $x_t \in \{0,1\}$ が，直前の時刻 $(t-1)$ に出力された記号 $x_{t-1} \in \{0,1\}$ にのみ依存して，下表の様に確率的に決定される情報源 X_1 がある．また，情報源 X_1 は二つの状態 $0,1$ をとり，記号 $0,1$ が出力された後，状態 $0,1$ へそれぞれ遷移するものとする．

　このとき，以下の各問に答えなさい．ただし，各問の答は小数第 2 位まで計算すること．また， $\log_2 3 \approx 1.58, \log_2 5 \approx 2.32, \log_2 7 \approx 2.81$ を用いてよい．

		x_t	
		0	1
x_{t-1}	0	0.20	0.80
	1	0.60	0.40

1) 2 つの状態 $0,1$ 間の状態遷移図を描きなさい．

2) 各状態の定常確率の値 $P(0), P(1)$ を求めなさい．

3) 情報源 X_1 の 1 記号当たりのエントロピーの値 $H(X_1)$ を求めなさい．

4) 情報源 X_2 は，2)で求めた定常確率に従って二つの状態 $0,1$ をとり，時刻 $(t-1)$ における状態に依存せずに，時刻 t の状態は決まるとする．また，状態 0 は記号 0 を，状態 1 は記号 1 を出力するものとする．
このとき．この情報源 X_2 のエントロピー $H(X_2)$ の値を求めなさい．

5) $H(X_1), H(X_2)$ のいずれが大きいか答えなさい．また，その理由について述べなさい．