博士前期課程
2023 年４月入学　一般入試

大学院ヘルスシステム統合科学研究科
医療機器医用材料部門

「選択科目」
（試験時間：120 分）

問題用紙

注意事項

1. 「解答はじめ」の指示があるまでは，次ページ以降を見てはいけません.
2. 「確率統計」,「微分積分」,「微分方程式/フーリエ・ラプラス変換」,「線形代数」,「情報理論」の５科目の問題が，それぞれ１枚ずつこの順にありますが，<u>3 科目を選択</u>して解答しなさい.
3. 解答用紙５枚と下書き用紙１枚を配布しますが，左上に書かれた科目の問題に対する解答を書きなさい.
   解答が表面だけで書けない場合には，続きを裏面に書きなさい.
4. すべての解答用紙と下書き用紙の右上には，受験番号と氏名を書きなさい.
5. 選択した科目に対しては，解答用紙の科目選択欄に『○印』をつけなさい.
6. 「解答やめ」の指示で，直ちに解答を止めなさい. 指示の後も筆記用具を持っている場合には不正行為と見なします.
7. 解答時間が終了すると，解答用紙と下書き用紙は回収します.
8. 問題等で質問がある場合には，静かに挙手をしなさい. 試験監督者が質問を取り次ぎます.

確率統計

問 1 2つのつぼU_1とU_2があり，U_1には，赤球が2個，白球が3個，黒球が5個入っており，U_2には，赤球が4個，白球が2個，黒球が3個入っているものとする．今，U_1から無作為に1個の球を取り出す試行をT_1，その取り出した球をU_2に入れた後，U_2から無作為に1個の弾を取り出す試行をT_2とする．以下の問に答えよ．

(1-a) T_1で赤球を取り出し，かつ，T_2で赤球を取り出す確率を求めよ．

(1-b) T_1で赤球を取り出し，かつ，T_2で白球を取り出す確率を求めよ．

(1-c) T_2で白球を取り出す確率を求めよ．

(1-d) T_2で取り出した球が白球であったとする．このとき，T_1取り出した球が赤球であった確率を，ベイズの定理を使用して求めよ．

問 2 連続型確率変数Xの確率密度関数と累積分布関数を，それぞれ，$f(x)$および$F(x)$と表わし，$f(x)$が以下で与えられるものとする．ただし，cは定数である．

$$f(x) = \begin{cases} 5 \cdot e^{-cx} & (0 \leq x \leq \infty) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

以下の問に答えよ．

(2-a) $x = t$ ($t > 0$，tは定数) のときの$F(x)$の値$F(t)$を，cを用いた式で表せ．

(2-b) 累積分布関数の定義によれば，$x = \infty$のときの$F(x)$の値$F(\infty)$の値はいくらになるか．具体的な値を記せ．

(2-c) cの値を求めよ．

(2-d) Xの平均$E(X)$を求めよ．

(2-e) Xの分散$V(X)$を求めよ．ただし，$V(X)$，$E(X)$，X^2の平均$E(X^2)$の間には$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$が成立することを用いて求めること．

微分積分

問1　$f(x,y) = e^x(\sin y + \cos y)$ が調和関数であるかどうかを考える.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を求めよ.

(2) 調和関数であるかどうかを，理由をつけて答えよ.

問2　不定積分 $I = \int \cos^4 x\, dx$ を求めることを考える.

(1) $I_n = \int \cos^n x\, dx$ のとき，$n \neq 0$ に対して漸化式

$$I_n = \frac{1}{n}\{\cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2}\}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 不定積分 I を求めよ.

問3　二重積分

$$I = \iint_D xy\,dxdy,\ D = \left\{(x,y);\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\} \qquad (a > 0, b > 0)$$

について，変数変換 $x = ar\cos\theta$，$y = br\sin\theta$ を用いて求めることを考える.

(1) 変数変換を行なった場合の，r と θ の範囲を求めよ.

(2) 変数変換に対するヤコビアンを求めよ.

(3) 二重積分 I を求めよ.

微分方程式/フーリエ・ラプラス変換

問１　次の微分方程式を解きなさい．

$$(y - 2x^2 y)dx + (x \log x - x^3)dy = 0$$

問２　図１，図２の波形について，次の問いに答えよ．なお$0 \le t$ とする．

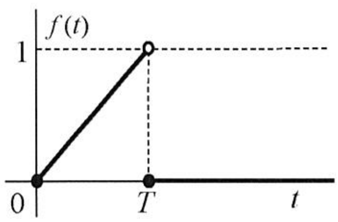

図１　三角波

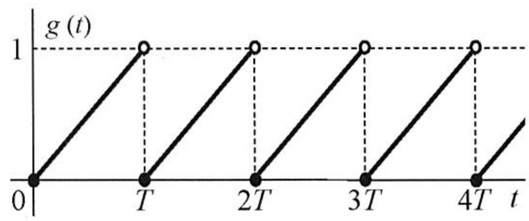

図２　のこぎり形周期関数

（１）図１の三角波 $f(t)$ を，以下の単位ステップ関数$U(t)$を用いて表せ．

$$U(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (0 \le t) \end{cases}$$

（２）$f(t)$ をラプラス変換せよ．なお関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を以下のように定義する．

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

（３）三角波が周期 T で無限に繰り返される図２の波形 $g(t)$ をラプラス変換せよ．

線形代数

問１　直交座標系に関して，ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ がそれぞれ

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

であるとき，この３つのベクトルを１辺とする平行６面体の体積を求めよ.

問２　次の行列 A の階数を求めよ.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & -2 & 3 & 1 \\ 1+a & 0 & 12 & 1 \\ 3a-11 & 2 & -a+13 & 0 \end{bmatrix}$$

問３　行列 J が次式で与えられる.

$$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

このとき，行列 J を n 乗した行列 J^n を求めよ.

情報理論

問　天気と風速との結合確率が下表のように与えられている．ただし，天気は晴と雨，風速は弱と強のそれぞれ2種類しかないものとする．また，天気と風速をそれぞれ事象系 A, B と表し，それぞれに属する事象 a_1, a_2, b_1, b_2 を下表の通り定めるものとする．このとき，以下の各問に答えなさい．

ただし，1), 3), 4)の答は小数第2位まで計算すること．また，$\log_2 3 \approx 1.58, \log_2 5 \approx 2.32, \log_2 7 \approx 2.81$ を用いてよい．

		天気 A	
		晴 a_1	雨 a_2
風速 B	弱 b_1	0.70	0.05
	強 b_2	0.05	0.20

1) エントロピー $H(A)$ の値を求めなさい．

2) 条件付き確率 $P(a_1|b_1), P(a_2|b_1), P(a_1|b_2), P(a_2|b_2)$ の値を計算し，分数により表しなさい．

3) 条件付きエントロピー $H(A|B)$ の値を求めなさい．

4) 相互情報量 $I(A;B)$ の値を求めなさい．

5) 相互情報量について，その一般的な意味を述べなさい．
また，本問題に於いて，もしも相互情報量の値がゼロであるならば，それは何を意味するか答えなさい．