博士前期課程
2022 年４月入学　一般入試

大学院ヘルスシステム統合科学研究科
医療機器医用材料部門

「選択科目」
（試験時間：120 分）

# 問題用紙

## 注意事項

1. 「解答はじめ」の指示があるまでは，次ページ以降を見てはいけません．
2. 「確率統計」，「微分積分」，「微分方程式/フーリエ・ラプラス変換」，「線形代数」，「情報理論」の５科目の問題が，それぞれ１枚ずつこの順にありますが，3 科目を選択して解答しなさい．
3. 解答用紙５枚と下書き用紙１枚を配布しますが，左上に書かれた科目の問題に対する解答を書きなさい．
   解答が表面だけで書けない場合には，続きを裏面に書きなさい．
4. すべての解答用紙と下書き用紙の右上には，受験番号と氏名を書きなさい．
5. 選択した科目に対しては，解答用紙の科目選択欄に『○印』をつけなさい．
6. 「解答やめ」の指示で，直ちに解答を止めなさい．指示の後も筆記用具を持っている場合には不正行為と見なします．
7. 解答時間が終了すると，解答用紙と下書き用紙は回収します．
8. 問題等で質問がある場合には，静かに挙手をしなさい．試験監督者が質問を取り次ぎます．

# 確率統計

**問1** 事象$X$の生起確率を$P(X)$，事象$X$の余事象を$\overline{X}$と表わし，事象$X$と$Y$の和事象および積事象を，それぞれ，$X \cup Y$および$X \cap Y$と表わす．また，事象$Y$が生起したという条件の下での事象$X$の生起確率(条件付確率)を$P(X|Y)$と表わす．以下の問に答えよ．

(1-a) 事象$A$と$B$について，$P(B)$，$P(A|B)$，$P(A \cap B)$の間に成立する等式を記せ．

(1-b) 事象$A$と$B$について，$P(A)$，$P(A \cap B)$，$P(A \cap \overline{B})$の間に成立する等式を記せ．

(1-c) 事象$A$と$B$について，$P(A|B) = P(A|\overline{B})$ならば，$A$と$B$は独立であることを証明せよ．

(1-d) 事象$A$と$B$について，$P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$ならば，$A$と$B$は独立であることを証明せよ．ただし，証明に際して，$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$が成立することを使用してもよい．

**問2** 連続型確率変数$X$の確率密度関数と累積分布関数を，それぞれ，$f(x)$および$F(x)$と表わし，$f(x)$が以下で与えられるものとする．ただし，$c$は定数である．

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(1-x) & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

以下の問に答えよ．

(2-a) $x = \infty$のときの$F(x)$の値$F(\infty)$を，$c$を用いた式で表せ．

(2-b) 累積分布関数の定義によれば，$F(\infty)$の値はいくらになるか．具体的な値を記せ．

(2-c) $c$の値を求めよ．

(2-d) $X$の平均$E(X)$を求めよ．

(2-e) $X$の分散$V(X)$を求めよ．ただし，$V(X)$，$E(X)$，$X^2$の平均$E(X^2)$の間には$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$が成立することを用いて求めること．

# 微分積分

問 1　次の(1)，(2)の問いに答えよ。

(1) $z = x^3 + y^3$，$x = \cos\theta$，$y = \sin\theta$ の関係があるとき，$\dfrac{dz}{d\theta}$ を計算し，$\theta$ のみの式で表せ。

(2) $z = e^{x+y}$，$x = \log(u - v)$，$y = \log(u + v)$ の関係があるとき，

$\dfrac{\partial z}{\partial u}$，$\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を計算し，$u$と$v$のみを用いた式で表せ。

問 2　以下の三重積分を求めることを考える。

$$I = \iiint_D x dx dy dz$$

ただし，$D = \left\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\right\}$，$a > 0$ とする。

(1) $I$ について極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\varphi$，$y = r\sin\theta\sin\varphi$，$z = r\cos\theta$ と行った場合の $I$ の式と $xyz$ 空間の領域$D$に対応する $(r, \theta, \varphi)$ の範囲を答えよ。

(2) (1)で極座標変換した結果を利用して，積分 $I$を求めよ。

# 微分方程式/フーリエ・ラプラス変換

問１　$0 \leq x$において，次の微分方程式を解きなさい．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x - U(x - 2\pi)\sin x$$

$$y(0) = 0,\ \ \frac{dy(0)}{dx} = 0$$

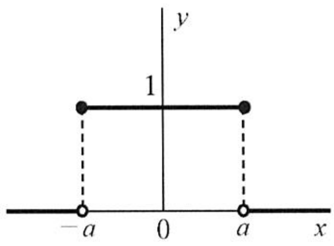
ここで$U(t)$は単位ステップ関数であり，以下のようにあらわされる．

$$U(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (0 \leq t) \end{cases}$$

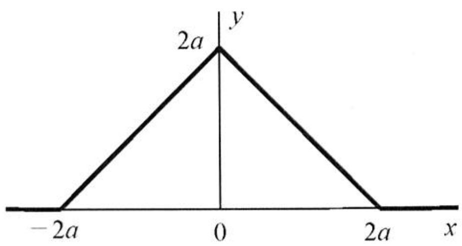
問２　任意の関数$f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ に対するフーリエ変換を以下の式で定義する．

$$F[f(x)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

ここで$g(x)$と$h(x)$は，以下のグラフによって定義される関数とする．$(a > 0)$




(a) $y = g(x)$




(b) $y = h(x)$

以下の(1)，(2)の問いに答えよ．

(1) $F[g(x)](\omega)$を求めよ．

(2) $F[h(x)](\omega)$を求めよ．必要ならば畳み込み積分を用いて$h(x) = g(x) * g(x)$となることを用いてもよい．畳み込み積分は，

$$h(x) = g(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)g(x - \xi)d\xi$$

とあらわされる．

# 線形代数

問１　２つの直線 $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}$,　$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$ の間の距離を求めよ．

問２　次の同次連立１次方程式を解け．

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+5x_2+x_3+2x_4+x_5=0 \\ 2x_1-2x_2-5x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$$

問３　次の行列の固有多項式，固有値，固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

# 情報理論

情報源記号 0 と 1の発生確率が，それぞれ 0.9, 0.1の 2 元独立生起情報源 $S$がある．このとき，以下の問に答えなさい．

ただし，各問の答は少数第 3 位まで計算すること．また， $\log_2 3 \approx 1.58, \log_2 5 \approx 2.32$ を用いてよい．

(1) この情報源からの出力を 2 つずつまとめた 4 種類の通報 00, 01, 10, 11を，2 元ハフマン符号で符号化しなさい．また，1 情報源記号あたりの平均符号長 $L_2$を求めなさい．

(2) この情報源からの出力を 3 つずつまとめた 8 種類の通報 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111を，2 元ハフマン符号で符号化しなさい．また，1 情報源記号あたりの平均符号長 $L_3$を求めなさい．

(3) 情報源のエントロピー $H(S)$を求め，平均符号長 $L_2, L_3$との大小関係について述べなさい．

(4) この情報源からの出力を $N$ 個ずつまとめた $2^N$種類の通報を，2 元ハフマン符号で符号化するとき，1 情報源記号あたりの平均符号長 $L_N$の，$N$を無限に大きくしたときの極限値 $\lim_{N\to\infty} L_N$の値は何か答えなさい．

(5) 問題(4)の結果が意味する，平均符号長の満たす一般的な性質について述べなさい．