博士前期課程
2021 年４月入学　一般入試

大学院ヘルスシステム統合科学研究科
医療機器・医用材料部門

「選択科目」
（試験時間：120 分）

問題用紙

注意事項

1. 「解答はじめ」の指示があるまでは，次ページ以降を見てはいけません.
2. 「確率・統計」,「微分・積分」,「微分方程式」,「フーリエ・ラプラス変換」,「線形代数」,「情報理論（エントロピー，情報量）」の６科目の問題が，それぞれ１枚ずつこの順にありますが，<u>３科目を選択</u>して解答しなさい.
3. 解答用紙６枚と下書き用紙１枚を配布しますが，左上に書かれた科目の問題に対する解答を書きなさい.
   解答が表面だけで書けない場合には，続きを裏面に書きなさい.
4. すべての解答用紙と下書き用紙の右上には，受験番号と氏名を書きなさい.
5. 選択した科目に対しては，解答用紙の科目選択欄に『◯印』をつけなさい.
6. 「解答やめ」の指示で，直ちに解答を止めなさい．指示の後も筆記用具を持っている場合には不正行為と見なします.
7. 解答時間が終了すると，解答用紙と下書き用紙は回収します.
8. 問題等で質問がある場合には，静かに挙手をしなさい．試験監督者が質問を取り次ぎます.

確率・統計

問 1　つぼの中に n 本のくじ C_1，C_2，$\cdots$，C_n が入っており，くじ C_i には，数値 i $(1 \leq i \leq n)$ が書かれているものとする．X さんと Y さんがこの順番にくじを引くものとし，C_1〜C_r $(1 \leq r < n)$ を当りくじとする．以下の問に答えよ．

(1-a)　X さんがくじを引いて，そのくじが当りくじかどうか確認したのち，そのくじをつぼに戻し，よくかきまぜてから，Y さんがくじを引くものとする．このとき，X さんが当りくじを引く確率，Y さんが当りくじを引く確率，X さんと Y さんの両方が当りくじを引く確率を求めよ．

(1-b)　X さんが引いたくじをつぼに戻さずに，Y さんがくじを引くものとする．このとき，X さんが当りくじを引く確率，Y さんが当りくじを引く確率，X さんと Y さんの両方が当りくじを引く確率を求めよ．

(1-c)　(1-a) と (1-b) のそれぞれのくじの引き方において，X さんが当りくじを引く事象と Y さんが当りくじを引く事象とは独立であるかどうかを述べよ．

問 2　離散型確率変数 X において，$X = k$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ となる確率 p_k が以下で与えられるものとする．ただし，a，b は実数定数で，0 より大きい値である．

$$p_k = {}_3\mathrm{C}_k a^k b^{3-k}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(2-a)　確率の総和は 1 になることを用いて，$a + b$ の値を求めよ．

(2-b)　X の平均 $E(X)$ を求めよ．

(2-c)　X の分散 $V(X)$ を求めよ．ただし，$V(X)$，$E(X)$，X^2 の平均 $E(X^2)$ の間には，$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ が成立することを用いて求めること．

微分・積分

問 1　関数$f(x,y)=x^2+y^2+y^3$の極値を求めることを考える．

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)$，$\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$を計算し，$\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)$，$\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$，$\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)$ を計算せよ．

(3) (1)で求めた，$\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) について，

それぞれの点で極値を取るかどうかを答えよ．

また極値を取る場合は，その値と極大値か極小値のどちらであるかも答えよ．

問 2　以下の積分を求めることを考える．

$$I=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy \text{ ただし，} D=\{(x,y);x^2+y^2\leq 1\}$$

(1) $x=r\cos\theta$，$\mathrm{y}=r\sin\theta$ とおいた時，以下の（ア）に当てはまる式を書け．

ただし，$D'=\{(r,\theta);0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$とする．

$$I=\iint_{D'} \boxed{\text{（ア）}}\ drd\theta$$

(2) (1)の結果を利用して，積分 Iを求めよ．

微分方程式

問１　次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$(y^2 + y\log y)dx + (x - x\log y)dy = 0$$

問２　次の微分方程式の一般解を求めよ．$a \neq 0$，$b \neq 0$ とする．

$$y'' + 4ay' + 3a^2y = e^{-bx}$$

フーリエ・ラプラス変換

問 1　フーリエ変換に関する以下の (1) 〜 (3) の問いに答えよ．

ただし，Dirac のデルタ関数 $\delta(x)$ は，以下のように与えられる．

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 \ (x \neq 0) \\ \\ \infty \ (x = 0) \end{cases}$$

また，以下の式で任意の関数 $f(x)\ (-\infty < x < \infty)$ に対するフーリエ変換を定義する．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \qquad \text{（ただし，}i\text{は虚数単位）}$$

(1) $\delta(x)$ のフーリエ変換を求めよ．

(2) $f(x)$ と任意の関数 $g(x)\ (-\infty < x < \infty)$ は絶対積分可能な非周期関数とする．

この時，$f(x)$ と $g(x)$ に対するたたみこみを以下のように定義する．

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(x - \tau) d\tau$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ がフーリエ変換，逆フーリエ変換可能であるとし，それぞれのフーリエ変換を $\mathcal{F}[f(x)] = F(\omega)$，$\mathcal{F}[g(x)] = G(\omega)$ とするとき，以下の式が成り立つことを示せ．

$$\mathcal{F}[f * g(x)] = F(\omega) G(\omega)$$

(3) (1)，(2) の結果を利用して，以下の式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(x - \tau) d\tau = f(x)$$

問2　ラプラス変換に関する以下の (1) 〜 (4) の問いに答えよ．

ただし，関数 $f(x)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[f(x)] = L(s)$ を以下の通りで定義する．

$$L(s) = \int_{0}^{\infty} f(x) e^{-sx} dx \quad \text{（ただし，}s\text{は複素数）}$$

(1) $\displaystyle\int_{s}^{\infty} L(s) ds = \mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$ が成り立つことを示せ．

(2) (1)の結果を利用して，$\mathcal{L}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]$ を求めよ．

(3) $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_{0}^{x} f(x) dx\right] = \dfrac{L(\mathrm{s})}{s}$ が成り立つことを部分積分法を利用して示せ．

(4) (2)，(3)の結果を利用して，$\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_{0}^{x} \frac{\sin x}{x} dx\right]$ を求めよ．

線形代数

問１　直交座標系に関して，ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

とするとき，$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を求めよ．ただし×は外積である．

問２　次の連立１次方程式が解をもつために実数 $a,\ b,\ c$ が満たすべき条件を求めよ．またそのときの解を求めよ．

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 3x + 4y + 5z = b \\ 5x + 6y + 7z = c \end{cases}$$

問３　実３次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の線形変換

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a\,(x_1 - x_2 + x_3) \\ b\,(x_1 + 3x_2) \\ c\,(2x_1 - 3x_2 - 5x_3) \end{bmatrix}$$

が直交変換となるように，実数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ．ただし $a,\ b,\ c$ はそれぞれ正の値とする．

情報理論（エントロピー，情報量）

街頭で 100 名の人に「近視の有無」と「眼鏡の着用」について調査したところ，次の調査結果を得た．ここで，「近視の有無」と「眼鏡の着用」をそれぞれ事象系 A, B と表し，それぞれに属する事象 a_1, a_2, b_1, b_2 を次の通り定めるものとする．このとき，以下の各問に答えよ．

ただし，問 (1), (2), (4), (5) の答えは小数第 2 位まで計算すること．また，$\log_2 5 \approx 2.32, \log_2 7 \approx 2.81, \log_2 13 \approx 3.70$ を用いてよい．

近視であり(a_1)，眼鏡を着用(b_1)：　20 人
近視であり(a_1)，眼鏡を非着用(b_2)：15 人
近視でなく(a_2)，眼鏡を着用(b_1)：　5 人
近視でなく(a_2)，眼鏡を非着用(b_2)：60 人

(1) 結合確率を示す下表を完成させよ．

		事象系 A	
		a_1	a_2
事象系 B	b_1		
	b_2		

(2) エントロピー $H(A)$ の値を求めよ．

(3) 条件付き確率 $P(a_1|b_1), P(a_2|b_1), P(a_1|b_2), P(a_2|b_2)$ の値を計算し，分数で答えよ．

(4) 条件付きエントロピー $H(A|B)$ の値を求めよ．

(5) 相互情報量 $I(A;B)$ の値を求めよ．また，この問題における相互情報量の意味について述べよ．