博士前期課程
2020 年 4 月入学　一般入試

大学院ヘルスシステム統合科学研究科
医療機器・医用材料部門

「選択科目」
（試験時間：120 分）

問題用紙

注意事項

1. 「解答はじめ」の指示があるまでは，次ページ以降を見てはいけません．
2. 「確率・統計」，「微分・積分」，「微分方程式」，「フーリエ・ラプラス変換」，「線形代数」，「情報理論（エントロピー，情報量）」の 6 科目の問題が，それぞれ 1 枚ずつこの順にありますが，3 科目を選択して解答しなさい．
3. 解答用紙 6 枚と下書き用紙 1 枚を配布しますが，左上に書かれた科目の問題に対する解答を書きなさい．
   解答が表面だけで書けない場合には，続きを裏面に書きなさい．
4. すべての解答用紙と下書き用紙の右上には，受験番号と氏名を書きなさい．
5. 選択した科目に対しては，解答用紙の科目選択欄に『○印』をつけなさい．
6. 「解答やめ」の指示で，直ちに解答を止めなさい．指示の後も筆記用具を持っている場合には不正行為と見なします．
7. 解答時間が終了すると，解答用紙と下書き用紙は回収します．
8. 問題等で質問がある場合には，静かに挙手をしなさい．試験監督者が質問を取り次ぎます．

確率・統計

問 1　離散型確率変数 X において，$X=k\ (k=0,1,2,\cdots)$ となる確率 p_k が以下のように表わされるものとする．

$$p_k = ce^{-2k}$$

ただし，c は定数である．以下の問に答えよ．

(1-a)　c の値を求めよ．

(1-b)　X の平均を求めよ．

問 2　確率変数 X，Y の平均 $E(X)$，$E(Y)$ を，それぞれ，μ_x，μ_y としたとき，共分散 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ は，以下のように定義される．

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\Big((X-\mu_x)(Y-\mu_y)\Big)$$

このとき，以下の等式が成り立つことを証明せよ．

(2-a)　$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

(2-b)　定数 a，b に対して，$\mathrm{Cov}(aX,bY) = ab\mathrm{Cov}(X,Y)$

(2-c)　$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$．ただし，$V(X)$，$V(Y)$，$V(X+Y)$ は，それぞれ，確率変数 X，Y，$X+Y$ の分散である．

微分・積分

問１　$\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos 2t \end{cases}$　のとき，$\frac{dy}{dx}$を t の式で表せ.

問２　不定積分$\int \frac{1}{\cos x} dx$を求めよ.

問３　$x^2 + xy + y^2 = 1$ の条件の下で，$z = x^2 + y^2$ が極値をもつ可能性のある点をすべて求めよ.

微分方程式

問１　次の微分方程式(A)について答えよ.

$$y' = \frac{6x-2y-3}{2x+2y-1} \tag{A}$$

(1) 次の連立方程式(B)の解$(x, y) = (\alpha, \beta)$を求めよ.

$$\begin{cases} 6x - 2y - 3 = 0 \\ 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \tag{B}$$

(2) 式(B)の解$(x, y) = (\alpha, \beta)$と式(C)を用いて，式(A)をsとtの方程式に変数変換せよ.

$$\begin{cases} x = s + \alpha \\ y = t + \beta \end{cases} \tag{C}$$

(3) (2)の結果を用いて，式(A)の微分方程式の一般解を求めよ.

問２　次の微分方程式(D)について答えよ.

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} = \log x \tag{D}$$

(1) $x = e^t$とおいて，yとtについての微分方程式を求めよ.

(2) (1)の結果を用いて，式(D)の微分方程式の一般解を求めよ.

フーリエ・ラプラス

問１　フーリエ変換を用いて、以下の定積分を求めることを考える。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega^2+1)^2} d\omega$$

ただし、関数$x(t)$　$(-\infty < t < +\infty)$を以下のように定義する。

$$x(t) = e^{-|t|}$$

また、任意の関数$f(t)$$(-\infty < t < +\infty)$のフーリエ変換$F(\omega)$は次のように定義される。

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (\text{ただし、}i\text{は虚数単位})$$

次の（１)、(２）に答えよ。

（１）　関数$x(t)$のフーリエ変換$X(\omega)$を求めよ。

（２）関数$x(t)$について、パーセバルの等式が成り立つとき、問題の定積分　$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega^2+1)^2} d\omega$ を求めよ。

　パーセバルの等式は、以下に示す通りである。

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

問２　一般に関数$g(t)$のラプラス変換$G(s)$を以下の通りに定義する。

$$G(s) = \int_{0}^{+\infty} g(t)e^{-st}dt \qquad (\text{ただし、}s\text{は複素数})$$

この時、$y(t) = t^n$（nは整数)のラプラス変換$Y(s)$を求めることを考える。
次の（１)、(２)、(３）に答えよ。

（１）$n = 0$のとき、すなわち、$y(t) = 1$のラプラス変換$Y(s)$を求めよ。
（２）$y(t) = t^{n-1}$のラプラス変換を$\mathcal{L}_{n-1}$と表す時、$y(t) = t^n$のラプラス変換$Y(s)$を$\mathcal{L}_{n-1}$を用いて表せ。ただし、$\lim_{t\to+\infty} e^{-st}t^n = 0$であることを用いて良い。
（３）$y(t) = t^n$のラプラス変換$Y(s)$を求めよ。

線形代数

複素数を成分にもつ行列$\boldsymbol{A}$のエルミート転置（複素共役転置）を$\boldsymbol{A}^H$と表すとする．例えば，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1-i \\ 1+i & i \end{bmatrix} \text{ のとき，} \boldsymbol{A}^H=\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ -1+i & -i \end{bmatrix}$$

となる．また，$\boldsymbol{A}^H=\boldsymbol{A}$が成立するとき，行列$\boldsymbol{A}$はエルミート行列と呼ばれる．以下の問いに答えよ．

(1) 1 行 3 列の行列（行ベクトル）$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} 2 & i & 2+i \end{bmatrix}$のエルミート転置$\boldsymbol{a}^H$を求めよ．

(2) 複素数を成分に持つ任意の 1 行 n 列の行列（行ベクトル）$\boldsymbol{x}$に対して，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}^H$が実数となることを証明せよ．

(3) エルミート行列$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 4 & i & 2+i \\ -i & -1 & 0 \\ 2-i & 0 & -1 \end{bmatrix}$の固有値と最大固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

情報理論（エントロピー，情報量）

コンピュータが 1 から 10 までの数字の中から，ある数（以下，X とする）を選び，あなたがその数を当てるゲームをする．ここで，あなたは適当な数（以下，Y とする）を選び，コンピュータに次の質問をすることができる．「X は，Y 以下であるか，Y より大であるか.」

このとき，以下の問に答えなさい．ただし，問 1), 2), 3), 5), 6)の答は小数第 2 位まで計算すること．また， $\log_2 3 \approx 1.58, \log_2 5 \approx 2.32$ を用いてよい．

問 1． X の値についての事象系 A を構成し，そのエントロピー $H\left(A\right)$ を求めなさい．ただし， $X = i$ であるという事象を a_i と表すこととする．

問 2． X が 4 以下であるか，4 より大であるかについての事象系 B を構成しなさい．ただし，X が 4 以下であるという事象を b_1，4 より大であるという事象を b_2 と表すこととする．

問 3． X が 4 以下であることが分かった場合の，事象系 A のエントロピー $H\left(A \middle| b_1\right)$ を求めなさい．

問 4． X が 4 より大であることが分かった場合の，事象系 A のエントロピー $H\left(A \middle| b_2\right)$ を求めなさい．

問 5．コンピュータへの質問により，“X は 4 以下または 4 より大である”ことが分かる場合の，条件付きエントロピー $H\left(A \middle| B\right)$ を求めなさい．

問 6．相互情報量 $I\left(A;B\right)$ を計算しなさい．

問 7．このゲームにおいて最も少ない回数で X を当てるには，相互情報量 $I(A;B)$ が常に最大になるように，コンピュータへ質問する数字を選べばよい．これは何故か，説明しなさい．