

博士前期課程
平成31年4月入学 一般入試

大学院ヘルスシステム統合科学研究科
医療機器・医用材料部門

「選択科目」
(試験時間：120分)

問題用紙

注意事項

1. 「解答はじめ」の指示があるまでは、次ページ以降を見てはいけません。
2. 「確率・統計」、「微分・積分」、「微分方程式」、「フーリエ・ラプラス変換」、「線形代数」、「情報理論（エントロピー、情報量）」の6科目の問題が、それぞれ1枚ずつこの順にあります。3科目を選択して解答しなさい。
3. 解答用紙6枚と下書き用紙1枚を配布しますが、左上に書かれた科目の問題に対する解答を書きなさい。
解答が表面だけで書けない場合には、続きを裏面に書きなさい。
4. すべての解答用紙と下書き用紙の右上には、受験番号と氏名を書きなさい。
5. 選択した科目に対しては、解答用紙の科目選択欄に『○印』をつけなさい。
6. 「解答やめ」の指示で、直ちに解答を止めなさい。指示の後も筆記用具を持っている場合には不正行為と見なします。
7. 解答時間が終了すると、解答用紙と下書き用紙は回収します。
8. 問題等で質問がある場合には、静かに挙手をしなさい。試験監督者が質問を取り次ぎます。

確率・統計

問 1 事象 X の生起確率を $P(X)$ と表わし、事象 X の排反事象を \bar{X} と表わす。また、事象 X と Y の和事象および積事象を、それぞれ、 $X \cup Y$ および $X \cap Y$ と表わす。以下の問に答えよ。

(1-a) 事象 A について、 $P(A)$ と $P(\bar{A})$ の間で成り立つ関係式を記せ。

(1-b) 事象 A と B について、 $P(A \cup B)$ 、 $P(A \cap B)$ 、 $P(A)$ 、 $P(B)$ の間で成り立つ関係式を記せ。

(1-c) 事象 A と B が独立であるとき、 $P(A \cap B)$ 、 $P(A)$ 、 $P(B)$ の間で成り立つ関係式を記せ。

(1-d) 事象 A と B が独立ならば、 \bar{A} と \bar{B} も独立である。これを証明せよ。ただし、証明に際して、 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cap B})$ が成立することを使ってよい。

問 2 離散型確率変数 X において、 $X = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) となる確率を p_k と表わしたとき、関数 $P(z)$ を以下のように定義する。

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

以下の問に答えよ。

(2-a) $P(1)$ を求めよ。

(2-b) X の平均 $E(X)$ と $P'(1)$ は等しくなることを証明せよ。ただし、 $P'(z)$ は、 $P(z)$ の 1 階微分関数である。

(2-c) $p_k = (1-a)a^k$ ($0 < a < 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$) のとき、 $P(z)$ および $E(X)$ を求めよ。ただし、 $|az| < 1$ とする。

微分積分

問1 $y = x^x$ の導関数($\frac{dy}{dx}$)を求め、 $\frac{dy}{dx} = 0$ となるときの x と y を答えよ. ($0 < x$)

問2 次の2重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \sqrt{x} \, dx dy \quad D: x^2 + y^2 \leq 2x$$

微分方程式

問 1 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$ydx + (y^2 \cos y - x)dy = 0$$

問 2 次の微分方程式の一般解を求めよ.

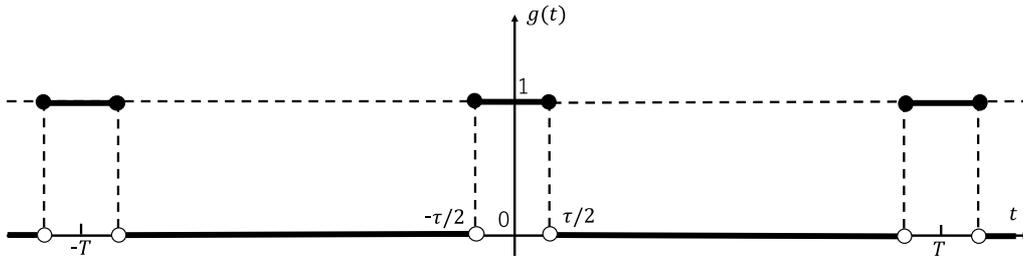
$$y'' - 3y' = 9x^2$$

フーリエ・ラプラス

問1 図に示す基本周期 T の矩形パルス列 $g(t)$ のフーリエ変換を求めることを考える。このとき、矩形パルス列の母関数 $h(t)$ は次の式で定義できる。

$$h(t) = \begin{cases} 1 \cdots \cdots & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 \cdots \cdots & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

以下の(1)から(3)に答えよ。



図

- (1) 関数 $h(t)$ のフーリエ変換 $H(f)$ を求めよ。
- (2) $g(t)$ の複素フーリエ係数を C_n (n は整数) とするとき、 $g(t)$ をフーリエ級数で表せ。

ただし、

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT) \quad (\text{ただし、} k \text{ は整数}) \quad \text{と表すことができる。}$$

- (3) $g(t)$ のフーリエ変換を求めよ。ただし、 $C_n = \frac{1}{T} H\left(\frac{n}{T}\right)$ である。

問2 入力 $x(t)$ に対する出力が $y(t)$ となる、次の微分方程式で表されるシステムについて考える。

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = x(t) + 2\frac{dx(t)}{dt}$$

$$\text{ただし、} x(0) = y(0) = 0$$

また、関数 $g(t)$ のラプラス変換 $G(s)$ は以下の様に定義される。

$$G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ist} dt \quad (\text{ただし、} i \text{ は虚数単位})$$

次の(1)、(2)に答えよ。

- (1) $x(t)$ および $y(t)$ のラプラス変換を $X(s)$ および $Y(s)$ とするとき、 $\frac{Y(s)}{X(s)}$ を求めよ。
- (2) 問題に示された微分方程式のインパルス応答 $h(t)$ を求めよ。ただし、単位ステップ関数を $u(t)$ とする。

線形代数

問1 n 次正方行列 \mathbf{A} は、 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ を満たすとする。また、 $\mathbf{B} = \mathbf{E} + \mathbf{A}$ とする。ここで、 \mathbf{E} は n 次の単位行列であり、 n は 2 以上の整数である。このとき、2 以上の整数 k に対して、 \mathbf{B}^k を求めよ。

問2 次の行列 \mathbf{C} を対角化する正則行列 \mathbf{D} を求めよ。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

情報理論（エントロピー，情報量）

事象 a_1 と a_2 からなる事象系 A と，事象 b_1 と b_2 からなる事象系 B との結合確率が下表のように与えられている．このとき，以下の各問に答えなさい．

ただし，問 1，問 3，問 4 の答えは小数第 2 位まで計算すること．また， $\log_2 3 \approx 1.58$ ， $\log_2 5 \approx 2.32$ を用いてよい．

		事象系 A	
		事象 a_1	事象 a_2
事象系 B	事象 b_1	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{20}$
	事象 b_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$

問 1．エントロピー $H(A)$ の値を求めよ．

問 2．条件付き確率 $P(a_1|b_1)$ ， $P(a_2|b_1)$ ， $P(a_1|b_2)$ ， $P(a_2|b_2)$ の値を計算し，分数で答えよ．

問 3．条件付きエントロピー $H(A|B)$ の値を求めよ．

問 4．相互情報量 $I(A;B)$ の値を求めよ．また，この問題における相互情報量の意味について述べよ．